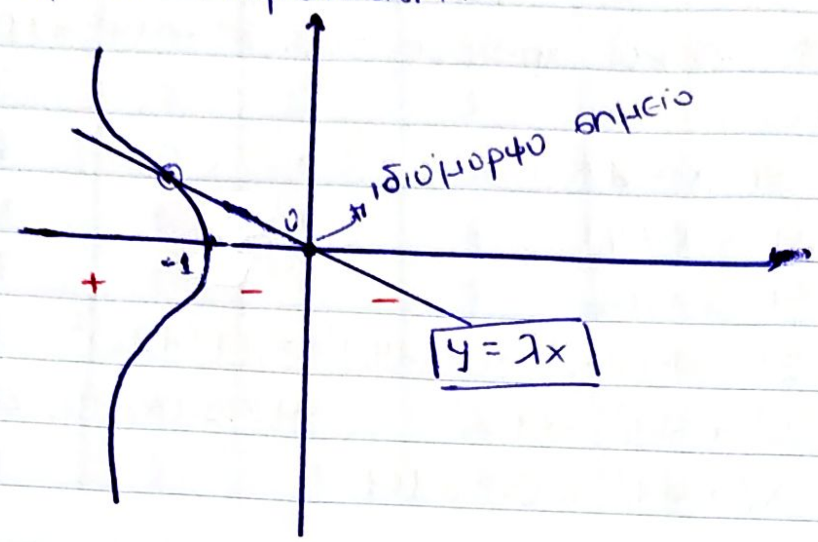
4ο μάθημα
23/3/20
(Εξ' αποστάσεως ...)

ΑΣΚΗΣΗ: Δ.ο. η καμπύλη $V \subseteq \mathbb{R}^2$ είναι ρητή
$V(x^3 + x^2 + y^2) \subseteq \mathbb{R}^2$

ΛΥΣΗ:

$x^3 + x^2 + y^2 = 0 \iff y^2 = -x^3 - x^2 = -x^2(x+1)$

Γραφική παράσταση:



Ψάχνω ευθεία

$$\begin{cases} y = \lambda x & (1) \\ x^3 + x^2 + y^2 = 0 \end{cases} \implies x^3 + x^2 + \lambda^2 x^2 = 0$$
$$\implies x^2 \cdot (x + 1 + \lambda^2) = 0$$
$$\implies x = 0 \text{ διπλή} \quad \text{ή} \quad \boxed{x = -1 - \lambda^2}$$
$$\downarrow$$
$$\boxed{y = -\lambda - \lambda^3}$$

Κατάφερα κ' βρήκα μία ρητή μορφή της καμπύλης.
Τώρα πρέπει $f(x,y) = 0$

$$f(x,y) = x^3 + x^2 + y^2 = -(1+\lambda^2)^3 + (1+\lambda^2)^2 + \lambda^2(1+\lambda^2)^2$$
$$= (1+\lambda^2)^2 \cdot \left(-(\cancel{1+\lambda^2}) + \cancel{1+\lambda^2}\right) = 0$$

HW
Δε μου φτάνει μόνο αυτό!
Ψάχνω (x_0, y_0) : $y_0 = \lambda_0 x_0$ με $x_0 = x(\lambda_0)$ κ' $y_0 = y(\lambda_0)$
κ' τέλος το βρίσκω για μοναδικό λ

ΑΣΚΗΣΗ (Θεωρία Αριθμών):

Δ.Ο. ∄ τριάδες (x,y,z) φυσικών αριθμών ε.ω.

$$x^2+8y^2=5z^2$$

ΛΥΣΗ:

Έστω ότι ∃ μία τριάδα (x_1,y_1,z_1) με $x_1^2+8y_1^2=5z_1^2$.

Ονομάζω $d=\text{ΜΚΔ}(x_1,y_1,z_1)$.

Τότε: $d \mid x_1 \Rightarrow x_1 = d x_0$, για κάποιο x_0

$d \mid y_1 \Rightarrow y_1 = d y_0$, για κάποιο y_0

$d \mid z_1 \Rightarrow z_1 = d z_0$, για κάποιο z_0

$$x_1^2+8y_1^2=5z_1^2 \Rightarrow d^2x_0^2+8d^2y_0^2=5d^2z_0^2$$

$$\Rightarrow x_0^2+8y_0^2=5z_0^2, \quad \text{Μ.Κ.Δ.}(x_0,y_0,z_0)=1$$

$$\Rightarrow x_0^2+8y_0^2 \equiv 0 \bmod 5$$

Άρα εξετάζω σε πινακάκι τι τιμές παίρνει τα x_0, y_0 κ' κατ' επέκταση το $x_0^2+8y_0^2$

x_0	0	1	2	3	4
y_0	0	1	2	3	4
x_0^2	0	1	4	$9 \bmod 5 = 4$	$16 \bmod 5 = 1$
$8y_0^2$	0	$8 \bmod 5 = 3$	$32 \bmod 5 = 2$	$72 \bmod 5 = 2$	$128 \bmod 5 = 3$

Παρατηρώ ότι έχω μερικές ίδιες τιμές

Περιπτώσεις:

- $0+0 = 0 \bmod 5$ ✓
- $0+3 = 3 \bmod 5$
- $0+2 = 2 \bmod 5$
- $1+0 = 1 \bmod 5$
- $1+3 = 4 \bmod 5$
- $1+2 = 3 \bmod 5$
- $4+0 = 4 \bmod 5$
- $4+2 = 1 \bmod 5$
- $4+3 = 2 \bmod 5$

Άρα πρέπει $x_0=[0]_5 \equiv 0 \bmod 5$, $y_0=[0]_5 \equiv 0 \bmod 5$

Έχουμε ότι: $\overset{(1)}{5 \mid x_0} \Rightarrow 5^2 \mid x_0^2$

$\overset{(2)}{5 \mid y_0} \Rightarrow 5^2 \mid y_0^2 \Rightarrow 5^2 \mid 8y_0^2$

$\Rightarrow 5^2 \mid x_0^2 + 8y_0^2 = 5z_0^2$

$\Rightarrow 5^2 \mid 5z_0^2 \Rightarrow 5 \mid z_0^2$

<u>Όμως</u>: 5 πρώτος άρα διαιρεί καθε παράγοντα

$5 \mid z_0 \cdot z_0 \Rightarrow 5 \mid z_0 \quad (3)$

$(1), (2), (3) \longrightarrow 5 \mid \text{Μ.Κ.Δ.}(x_0, y_0, z_0) = 1$

<u>ΑΤΟΠΟ</u>

άρα $\nexists$ τριάδα : $x^2 + 8y^2 = 5z^2$